Roman Z m y ś l o n y (Wrocław)

ESTYMACJA PARAMETRÓW W MODELACH LOSOWYCH I MIESZANYCH

1. Wstęp

W niniejszej pracy podajemy metody estymacji parametrów dla następujących modeli

$$y = \sum_{i=1}^{k} X_i b_i, \tag{1}$$

gdzie X_i są znanymi n - wierszowymi macierzami, a b_i, z wyjątkiem b_1, wektorami losowymi. Zakładamy ponadto, że $X_k = I$ jest macierzą jednostkową. Dla $i=2,\ldots,k$ wektory losowe b_i mają wielowymiarowe rozkłady normalne $N(0,\sigma_i^2 V_i)$, gdzie V_i są znanymi macierzami, natomiast $\sigma_i^2 \geq 0$. Ponadto zakładamy, że $V_k=I$ oraz, że wektory b_i są parami nieskorelowane. W przypadku gdy $X_1(1,\ldots,1)'=\mathbb{1}$, modele o wyżej opisanej strukturze noszą nazwę modeli losowych, a $\sigma_2^2,\ldots,\sigma_k^2$ noszą nazwę komponentów wariancyjnych. Natomiast gdy X_1 ma dwie lub więcej kolumn modele te nazywają się modelami mieszanymi.

W pracy podane są metody estymacji nieznanych parametrów. Estymatory dla b_1 są liniowymi funkcjami wektora y. Natomiast $\sigma_2^2,\ldots,\sigma_k^2$ estymuje się formami kwadratowymi tzn. są postaci $y'Ay$, gdzie A jest macierzą symetryczną. Własności optymalne tych estymatorów można znaleźć w pracach [1] - [4].

2. Estymatory dla składowych wektora b_1.

Estymatory dla parametrów b_i, które oznaczać będziemy symbolem $\hat{b}_i$ otrzymuje się metodą najmniejszych kwadratów, tzn.

$$\hat{b}_i = (X'X)^{-} X'y, \tag{2}$$

gdzie $(X'X)^{-}$ jest dowolną uogólnioną macierzą odwrotną macierzy $X'X$. W przypadku modelu losowego b_1 jest liczbą, a $\hat{b}_1$ średnią arytmetyczną składowych wektora obserwacji.

Estymację $\sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$ rozważać będziemy oddzielnie dla modeli losowych i mieszanych. W modelu losowym dla wygody przyjmiemy $\sigma_1^2 = b_1^2$.

3. Estymacja komponentów wariancyjnych w modelach losowych.

Niech $\sigma = (\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2)'$ będzie wektorem kolumnowym złożonym z b_1^2 i z kolejnych komponentów wariancyjnych. Obliczamy najpierw $W_1 = 11'$ oraz macierze $W_i = X_i V_i X_i'$ dla $i=2,\ldots,k$. Następnie tworzymy macierz symetryczną $T = [t_{ij}]$ wymiaru $k \times k$, gdzie $t_{ij} = tr(W_i W_j)$. Tutaj i w dalszej pracy $tr(A)$ oznacza ślad macierzy A tzn. sumę elementów na głównej przekątnej. W dalszym kroku obliczamy wektor kolumnę $z = (z_1, \ldots, z_k)'$, gdzie $z_i = y'W_i y$. Estymatorem dla σ jest $\hat{\sigma} = T^{-} z$.

4. Estymacja komponentów wariancyjnych w modelach mieszanych

W przypadku modeli mieszanych postępujemy inaczej. Najpierw obliczamy $P=X(X'X)^{-}X'$ tzn. macierz rzutu na przestrzeń generowaną przez kolumny macierzy X. Następnie obliczamy W_i dla $i=2,\ldots,k$ tak samo jak dla modeli losowych, a potem $U_{i-1}=W_i-PW_iP$. Elementy macierzy $T=[t_{ij}]$ wymiaru $(k-1)\times(k-1)$ liczymy według wzoru $t_{ij}=tr(U_iU_j)$. Estymatorem dla $\sigma=(\sigma_2^2,\ldots,\sigma_k^2)$ jest $\hat{\sigma}=T^{-}z$, gdzie $z=(z_1,\ldots,z_{k-1})'$ jest wektorem $(k-1)\times 1$, którego i-ta składowa $z_i=y'U_iy$.

W przypadku, gdy PW_i jest macierzą symetryczną łatwo można wykazać, że $PW_iP=PW_i$.

Przykłady. 1. Rozważmy model losowy dla dwukierunkowej klasyfikacji krzyżowej z jedną obserwacją w podklasie. Niech

$$X_{ij}=\mu+a_i+b_j+e_{ij}, \qquad i=1,\ldots,r, \quad j=1,\ldots,s, \tag{1}$$

gdzie μ jest średnią ogólną, natomiast a_i,b_j,e_{ij} są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych z wartościami oczekiwanymi zero i wariancjami σ_a^2,σ_b^2 i σ_e^2 odpowiednio. Przyjmując

$$y=(y_{11}y_{12},\ldots,y_{1s},y_{21},\ldots,y_{2s},\ldots,y_{rs})'$$
$$e=(e_{11}e_{12},\ldots,e_{1s},e_{21},\ldots,e_{2s},\ldots,e_{rs})'$$
$$\beta_2=(a_1,\ldots,a_r)'$$
$$\beta_3=(b_1,\ldots,b_s)'$$

równania (1) można zapisać wektorowo w następujący sposób

$$y=\mu\mathbb{1}+X_2\beta_2+X_3\beta_3+e,$$

gdzie $\mathbb{1}$ jest wektorem $n\times 1$ jedynek, $(n=r\cdot s)$, $X_2=[x_{ij}]$ jest macierzą $n\times r$ przy czym

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } (s-1)j+1\leq i\leq sj \\ 0 & \text{w pozostałym przypadku, natomiast } X_3 \end{cases}$$

jest macierzą blokową złożoną z r macierzy jednostkowych I każda wymiaru $s\times s$ tzn.

$$X_3 = \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}.$$

Ponieważ zmienne losowe a_i, b_j, e_{ij} są niezależne, więc $W_2=X_2X_2'$, $W_3=X_3X_3'$ i $W_4=I$. Macierz $W_1=11'$ jest macierzą jedynek wymiaru $n\times n$.

Łatwo sprawdzić, że macierz T jest następująca

$$\begin{bmatrix} n^2 & sn & rn & n \\ sn & sn & n & n \\ rn & n & rn & n \\ n & n & n & n \end{bmatrix}.$$

Wektor z ma składowe

$$z_1=y_{..}^2 \ , \ z_2=\sum_{i=1}^{r} y_{i.}^2 \ , \ z_3=\sum_{j=1}^{s} y_{.j}^2 \ , \ z_4=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} y_{ij}^2 \ .$$

Kropka zamiast wskaźnika oznacza sumę po tym wskaźniku.

Dla $r \geq 2$ i $s \geq 2$ równanie $T\,z=\sigma$ ma następujące jednoznaczne rozwiązanie

$$\hat{\sigma}_e^2 = \overline{SS}_e,$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{s}(SS_a-SS_e),$$

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{1}{r}(SS_b-SS_e),$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(z_4-\hat{\sigma}_a^2-\hat{\sigma}_b^2-\hat{\sigma}_e^2),$$

gdzie

$$\overline{SS}_e = \frac{1}{(r-1)(s-1)}\left(z_4-\frac{1}{s}z_3-\frac{1}{s}z_2+\frac{1}{n}z_1\right),$$

$$\overline{SS}_a = \frac{1}{(r-1)}\left(\frac{1}{s}z_2-\frac{1}{n}z_1\right),$$

$$\overline{SS}_b = \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{r}z_3-\frac{1}{n}z_2\right).$$

Przykład 2. Rozważmy model mieszany dla dwukierunkowej klasyfikacji z jedną obserwacją w podklasie, przyjmując, że a_i są efektami stałymi. Z uwagi na to, że wektor $\mathbb{1}$ jest sumą kolumn macierzy X_2 w przykładzie pierwszym, więc macierz P

$$P = X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2' = \frac{1}{s}X_2X_2' = \frac{1}{s}V_2.$$

Macierz PV_3 jest symetryczna, zatem

$$W_1 = (I - \frac{1}{S} V_2)V_3$$

$$W_2 = I - \frac{1}{S} V_2.$$

W tym przypadku macierz

$$T = r(s-1) \begin{bmatrix} r & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

podczas, gdy

$$z_1 = \sum_{j=1}^{s} y_{.j}^2 - \frac{1}{S} y_{..}^2$$

i

$$z_2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} y_{ij}^2 - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{r} y_{i.}^2 .$$

Równanie $T\sigma = z$ ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $s \geq 2$, $r \geq 2$. Łatwo sprawdzić, że $\hat{\sigma}_b^2$ i $\hat{\sigma}_e^2$ są takie same jak w modelu losowym.

Referencje

[1] S.Gnot, W.Klonecki and R.Zmyślony, Best linear plus quadratic unbiased estimation of parameters in mixed linear models, Zastosowania Matematyki 15,4 (1977), 455-462.

[2] R.Zmyślony, Estimation of variance components in random models,Zastosowania Matematyki 13, 4(1973),521-527.

[3] R.Zmyślony, Kwadratowo dopuszczalne estymatory w modelach losowych,Matematyka Stosowana 7, (1976).117-122

[4] R.Zmyślony, On estimation of parameters in linear Models, Zastosowania Matematyki 15, 3(1976), 271-276.